

# FONCTIONS PRIMITIVES

## FONCTION PRIMITIVE D'UNE FONCTION

**Définition :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  ; On dit que la fonction  $F$  est une fonction primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$  si :  
 1)  $F$  est dérivable sur  $I$   
 2)  $(\forall x \in I)(F'(x) = f(x))$

**Propriété1:** Si  $f$  est continue sur  $I$  alors  $f$  admet une fonction primitive sur  $I$

**Propriété2 :** Si  $f$  admet une fonction primitive  $F$  sur  $I$  alors toutes les fonctions primitives de  $f$  sur  $I$  s'écrivent de la forme :  $F + \lambda$  où  $\lambda$  est un réel.

**Propriété3 :** Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux fonction primitive d'une fonction  $f$  sur  $I$  alors :  
 $(\forall x \in I)(F_2(x) = F_1(x) + \lambda)$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$

**Propriété4 :** Si  $f$  admet une fonction primitive sur  $I$  et  $x_0 \in I$ ; alors il existe une unique fonction  $F_0$  fonction

Primitive de  $f$  telle que  $F_0(x_0) = y_0$  où  $y_0$  un réel quelconque.

**Propriété5 :** Si  $F$  est une fonction primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$  et  $G$  une fonction primitive de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $I$  et  $\alpha$  un réel alors :

- $(F + G)$  est une fonction primitive de la fonction  $(f + g)$  sur  $I$
- $(\alpha F)$  est une fonction primitive de la fonction  $(\alpha f)$  sur  $I$

### Tableau des fonctions primitives usuelles.

La fonction	Sa fonction primitive
$\alpha$ ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )	$\alpha x + c$
$x^n$ ( $n \in \mathbb{N}$ )	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}}$
$x^r$ ( $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ )	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$
$\frac{a}{1+x^2}$	$a \times \arctan(x) + c$



## Opérations sur les fonctions primitives.

Les seules opérations sur les fonctions primitives sont : la somme et le produit par un réel. Mais grâce au tableau des opérations sur les fonctions dérivées on peut en déduire :

La fonction	Sa fonction primitive
$u' + v'$	$u + v + C^{te}$
$\alpha u'$	$\alpha u + C^{te}$
$u' u^n$ ( $n \in \mathbb{N}$ )	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C^{te}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + C^{te}$
$u' \sqrt[n]{u}$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ )	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{u^{n+1}} + C^{te}$
$u' u^r$ ( $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ )	$\frac{1}{r+1} u^{r+1} + C^{te}$
$u' \times v'$ ou	$v' u + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2+1}$	$\arctan(u) + C$

La ligne en couleur gaule est une généralisation des 4 lignes précédentes.

### Quelque formule utile pour calculer les primitives

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos a \sin b = -\frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

Si  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$  on a :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien